

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC



NGUYỄN THỊ NHINH

**DUỚI VI PHÂN BẠC HAI VÀ CÁC ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU
CHO LỚP CÁC BÀI TOÁN TỐI ƯU TRƠN C^1**

Chuyên ngành: Toán ứng dụng

Mã số : 8 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. Dương Thị Việt An

THÁI NGUYÊN - 2020

Mục lục

Mở đầu	4
Lời cảm ơn	7
1 Kiến thức chuẩn bị	8
1.1 Tính khả vi và khả vi chặt	8
1.2 Nón pháp tuyến và Dưới vi phân bậc nhất	10
1.2.1 Nón pháp tuyến	10
1.2.2 Dưới vi phân	12
1.3 Đối đạo hàm và Dưới vi phân bậc hai	14
1.4 Một số kết quả bổ trợ	15
2 Điều kiện cần tối ưu cho lớp các bài toán tối ưu trơn C^1	20
2.1 Điều kiện cần tối ưu	20
2.2 Ví dụ minh họa	24
3 Điều kiện đủ tối ưu cho lớp các bài toán tối ưu trơn C^1	29
3.1 Điều kiện đủ tối ưu	29
3.2 Ví dụ minh họa	32
Kết luận	34

Danh mục ký hiệu

$\mathbb{R}$	trường số thực
$\overline{\mathbb{R}}$	tập số thực suy rộng
$\mathbb{R}^+$	tập số thực không âm
$\emptyset$	tập rỗng
$\forall x$	với mọi x
$\exists x$	tồn tại x
$M \cap N$	giao của hai tập hợp M và N
$ x $	giá trị tuyệt đối của x
$\ x\ $	chuẩn của vectơ x
$\mathbb{B}_\gamma(x)$	hình cầu mở tâm x , bán kính $\gamma > 0$
$\text{int } A$	phần trong của tập A
$x_k \downarrow \bar{x}$	x_k hội tụ đến $\bar{x}$ và $x_k > \bar{x}$
$\inf_{x \in K} f(x)$	infimum của tập số thực $\{f(x) \mid x \in K\}$
$\text{epi } f$	trên đồ thị của hàm f
$\text{dom } f$	miền xác định của hàm f
$\nabla f(\bar{x})$	đạo hàm Fréchet của f tại $\bar{x}$

$\langle x^*, x \rangle$	giá trị của phiếm hàm x^* tại x
$\widehat{N}(x; \Omega)$	nón pháp tuyến Fréchet của Ω tại $\bar{x}$
$\widehat{\partial}\varphi(x)$	dưới vi phân Fréchet của φ tại x
$F : X \rightrightarrows Y$	ánh xạ đa trị từ X vào Y
$\widehat{\partial}^2\varphi(\bar{x})(\cdot)$	dưới vi phân Fréchet bậc hai của φ tại $\bar{x}$
$\text{dom } F$	miền hữu hiệu của ánh xạ đa trị F
$\text{gph } F$	đồ thị của ánh xạ đa trị F
$\widehat{D}^*F(\bar{x}, \bar{y})(\cdot)$	đối đạo hàm Fréchet của ánh xạ đa trị F tại $(\bar{x}, \bar{y})$

Mở đầu

Bài toán quy hoạch toán học trong các không gian vô hạn chiều đã được nghiên cứu từ giữa thế kỉ trước, bắt đầu với mô hình bài toán quy hoạch tuyến tính vô hạn chiều. Nhiều bài toán tối ưu trong các không gian hàm, có cấu trúc phức tạp, như bài toán điều khiển tối ưu và bài toán biến phân có thể đưa về bài toán quy hoạch toán học trong không gian vô hạn chiều.

Để giải bài toán quy hoạch toán học, người ta phải dựa vào điều kiện cần tối ưu bậc nhất và bậc hai. Các điều kiện tối ưu bậc nhất được phát biểu thông qua đạo hàm bậc nhất hoặc dưới vi phân của hàm mục tiêu, và xấp xỉ tiếp tuyến bậc nhất hoặc nón pháp tuyến của tập ràng buộc. Các điều kiện tối ưu bậc hai được phát biểu thông qua đạo hàm bậc hai hoặc dưới vi phân bậc hai của hàm mục tiêu, và tập tiếp xúc bậc hai của tập ràng buộc hoặc đối đạo hàm của ánh xạ nón pháp tuyến của tập ràng buộc (cũng chính là dưới vi phân bậc hai của hàm chỉ của tập ràng buộc).

Trong các bài toán tối ưu, điều kiện tối ưu bậc nhất (Quy tắc Fermat) thường đóng vai trò là các điều kiện cần cực trị. Quy tắc Fermat cho ta một tiêu chuẩn xác định những điểm có khả năng đạt cực trị của một

hàm số. Một điểm thỏa mãn quy tắc Fermat còn gọi là một điểm dừng. Đối với một bài toán tổng quát (không lồi) thì quy tắc Fermat không đủ để ta nhận biết một điểm dừng có là điểm cực trị của bài toán hay không. Điều kiện tối ưu bậc hai không những làm mịn hơn điều kiện cần cực trị bậc nhất mà còn bổ sung cho các điều kiện này trong việc đưa ra các điều kiện đủ cho một điểm dừng là điểm cực trị của hàm số. Hơn thế nữa, nó còn giúp ta xây dựng các thuật toán tìm nghiệm tối ưu cũng như đánh giá tốc độ hội tụ của các thuật toán này.

Xét bài toán tối ưu tổng quát

$$\min\{\varphi(x) \mid x \in X\}, \quad (\text{P})$$

ở đó $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ là khả vi liên tục (hàm thuộc lớp C^1). Trong trường hợp hàm φ khả vi liên tục đến cấp hai, đã có nhiều kết quả nghiên cứu về điều kiện cần và đủ tối ưu bậc hai thông qua các tính chất nửa xác định dương và xác định dương của ma trận Hessian $\nabla^2\varphi(\cdot)$. Trong trường hợp ma trận Hessian $\nabla^2\varphi(\cdot)$ không tồn tại, các tác giả N.H. Chieu, G.M. Lee và N.D. Yen [3] đã thiết lập được các điều kiện cần và đủ tối ưu bậc hai cho lớp các bài toán với hàm mục tiêu trơn C^1 bằng cách dùng dưới vi phân bậc hai Fréchet và dưới vi phân qua giới hạn (dưới vi phân Mordukhovich).

Mục đích của luận văn này là trình bày các kết quả về điều kiện cần và đủ tối ưu cho lớp các bài toán tối ưu trơn C^1 bằng cách sử dụng dưới vi phân Fréchet bậc hai. Nội dung của luận văn được chúng tôi biên dịch, sắp xếp và trình bày lại một cách có hệ thống từ các kết quả trong bài báo của các tác giả N.H. Chieu, G.M. Lee và N.D. Yen [3]. Phần cuối mỗi chương đều có các ví dụ minh họa cho kết quả chính được giải

một cách chi tiết.

Luận văn gồm phần mở đầu, phần kết luận, danh mục tài liệu tham khảo, và ba chương có nội dung như sau:

Chương 1 " Kiến thức chuẩn bị " trình bày các kiến thức về tính khả vi và khả vi chặt, nón pháp tuyến và dưới vi phân bậc nhất, đối đạo hàm và dưới vi phân bậc hai, cùng với một số kết quả bổ trợ.

Chương 2 "Điều kiện cần tối ưu cho lớp các bài toán tối ưu trơn C^1 ", trong chương này, chúng tôi trình bày có hệ thống các kết quả về điều kiện cần tối ưu cho bài toán (P) trong trường hợp X là không gian hữu hạn chiều và trong trường hợp X là không gian Banach. Chúng tôi cũng tính toán chi tiết hai ví dụ minh họa cho các kết quả chính của chương.

Chương 3 "Điều kiện đủ tối ưu cho lớp các bài toán tối ưu trơn C^1 ", ở chương này, kết quả chính đầu tiên về điều kiện đủ tối ưu được thiết lập trên không gian Asplund. Trong trường hợp X là không gian Hilbert, chúng tôi trình bày một kết quả về điều kiện đủ tối ưu theo nghĩa *nghiệm cực tiểu địa phương ổn định nghiêng* cho bài toán tối ưu (P). Ví dụ minh họa được tính toán chi tiết và đưa ra ở cuối chương.

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của TS. Dương Thị Việt An. Em xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới Cô đã hướng dẫn hiệu quả và truyền cho em những kinh nghiệm nghiên cứu trong quá trình em học tập và hoàn thiện luận văn này.

Em cũng xin chân thành cảm ơn các thầy cô trong Khoa Toán - Tin, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho em trong suốt quá trình em học tập ở trường.

Thái Nguyên, ngày 16 tháng 8 năm 2020

Học viên

Nguyễn Thị Ninh

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi trình bày các kiến thức cơ bản phục vụ cho việc nghiên cứu ở các chương sau, đó là các khái niệm và tính chất của nón pháp tuyến, dưới vi phân bậc nhất, đối đạo hàm và dưới vi phân bậc hai. Nội dung của chương được tham khảo từ các tài liệu [1], [2], [4] và [5].

1.1 Tính khả vi và khả vi chặt

Cho X, Y là các không gian Banach. Ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ được gọi là *khả vi Fréchet* (Fréchet differentiable) tại $\bar{x} \in X$ nếu tồn tại một phiếm hàm tuyến tính liên tục $\nabla f(\bar{x}) : X \rightarrow Y$, gọi là *đạo hàm Fréchet* (Fréchet derivative) của f tại $\bar{x}$, sao cho

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x})(x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|} = 0.$$

Đạo hàm Fréchet là khái niệm cơ bản trong giải tích. Khái niệm sau là ít quen thuộc hơn.

Định nghĩa 1.1. (Xem [5, Vol. I, tr. 19]) Ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ được gọi là *khả vi chặt* (strict differentiable) tại $\bar{x}$ nếu f có đạo hàm Fréchet

$\nabla f(\bar{x})$ tại $\bar{x}$ và nếu

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \bar{x} \\ u \rightarrow \bar{x}}} \frac{f(x) - f(u) - \nabla f(\bar{x})(x - u)}{\|x - u\|} = 0. \quad (1.1)$$

Nhận xét 1.1. Do định nghĩa, nếu f khả vi chặt tại một điểm nào đó, thì f phải khả vi Fréchet tại điểm đó. Điều ngược lại là không đúng, tức là có những hàm số khả vi Fréchet mà không khả vi chặt.

Ví dụ 1.1. Cho $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ được cho bởi công thức

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } x \text{ là số hữu tỉ,} \\ 0 & \text{nếu } x \text{ là số vô tỉ.} \end{cases}$$

Xét tại $\bar{x} = 0$, hàm f là khả vi Fréchet nhưng không khả vi chặt. Thật vậy, dễ thấy rằng $\nabla f(\bar{x}) = 0$ là đạo hàm Fréchet tại $\bar{x}$. Để chứng minh f không khả vi chặt tại $\bar{x} = 0$, ta lấy hai dãy

$$x_k = \frac{1}{k}, \quad u_k = \frac{\sqrt{2}}{k^2} + \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Khi đó, nếu (1.1) nghiệm đúng thì ta phải có

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x_k) - f(u_k)}{\|x_k - u_k\|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k^2}}{\left| \frac{-\sqrt{2}}{k^2} \right|} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

mâu thuẫn. Vậy f không khả vi chặt tại $\bar{x} = 0$.

Nhắc lại rằng hàm f được gọi là thuộc lớp C^1 nếu f khả vi liên tục.

Khi đó ta có kết quả sau:

Mệnh đề 1.1. (Xem [5, Vol. I, tr. 19]) *Nếu $f \in C^1$, tức là f khả vi Fréchet trong lân cận của $\bar{x}$, và $\nabla f(\cdot)$ liên tục trong lân cận ấy, thì f khả vi chặt tại $\bar{x}$.*